

Université Hassan II- Mohammedia  
Faculté des Sciences et Techniques

*Département de Mathématiques*  
*Option :MIP*

*AU :2013/2014*  
*Module :M311*

Premier partiel 2103 : durée 1H 30

**Exercice 0.0.1**

Soit  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$  où

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

1. Montrer que  $f$  n'a pas de points critiques (stationnaires) dans l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 9\}.$$

(2 pts)

2. Etablir que l'origine  $O(0, 0)$  est un minimum global.

(1 pts)

3. Etudier les variations de  $f$  sur le cercle  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ . (2 pts)

**Exercice 0.0.2**

Soit  $f$  une fonction de deux variables de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $(\mathbb{R}^*)^2$  vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Soit  $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$  où  $h$  est une fonction d'une seule variable de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$  en fonction de celles de  $h$ . (2 pts)
2. Donner une équation aux dérivées partielles  $(E')$  vérifiée par  $h$ . (1 pts)
3. Résoudre  $(E')$  puis déterminer toutes les fonctions  $f$  solutions de  $(E)$ . (2 pts)

**Exercice 0.0.3**

soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{y}\right), & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Donner  $D_f$  le domaine de définition de  $f$  et montrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ . (0.5++0.5+1 pts)
2. Calculer les dérivées partielles premières par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$  en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $y \neq 0$ , et en  $(0, 0)$ . (1+1 pts)

3. Etudier la continuité des fonctions dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2$  (on peut considérer les suites  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi})$ ). (1+1 pts)

**Exercice 0.0.4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $f(x, y) = x \cdot \ln(1 + y^2) - ye^x$ .

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en  $(1, 0)$ . (2 pts)
2. Soit l'équation  $x \cdot \ln(1 + y^2) - ye^x = 0$ .
  - (a) Montrer que cette équation définit implicitement  $y = \phi(x)$  en fonction de  $x$  au voisinage de  $(1, 0)$ . (1 pts)
  - (b) Calculer  $\phi'(x)$  au voisinage de 1. (1 pts)

=====

Groupe : M.HARFAOUI- S. SAJID
-------------------------------

Université Hassan II- Mohammedia  
Faculté des Sciences et Techniques

*Département de Mathématiques*  
*Option :MIP*

*AU :2013/2014*  
*Module :M311*

**Partiel 2 : durée 1H 30**  
**Session :Juin 2014**

**NB.**

Il sera tenu compte de la **clarté** des réponses, de la **rigueur** du raisonnement et du **soin** apporté à la copie.

**1.5 points** du barème seront affectés à la **rédaction**.

**Exercice 0.0.5**

*On considère la fonction*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1) Déterminer les points critiques de  $f$ . ( 2 points)
- 2) Etudier les extremums de  $f$ . ( 2 points)

**Exercice 2**

*On considère la forme différentielle  $\omega$  définie sur  $D = (R^+)^2$  par  $\omega(x, y) = \frac{y^2 dx + x^2 dy}{xy^2 + yx^2}$*

- 1) Montrer que  $\omega$  est fermée sur  $D$  ( 1 points)
- 2)  $\omega$  est-elle exacte ? Justifier votre réponse. ( 1.5 points)
- 3) Calculer  $\int_C \omega$ , où  $C$  est une courbe fermée de  $D$ . ( 1.5 points)

**Exercice 0.0.6** *On considère le domaine  $D$  de  $R^2$  délimité par  $C_1 : y = |x|$  et  $C_2$*

*le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $R$ .*

*Soit  $\omega$  la forme différentielle définie par  $\omega(x, y) = -ydx + xdy$*

1. Tracer graphiquement  $D$  en précisant les **sommets** et leurs **coordonnées**. ( 1.5 points)
2. Calculer la surface de  $D$ . ( 1 points)
3. Soit  $\partial D^+$  le bord de  $D$  orienté positivement. Calculer l'intégrale  $I = \int_{\partial D^+} \omega$ 
  - (a) Directement. ( 1.5 points)
  - (b) En utilisant la formule de Green-Reimann. ( 1.5 points)

**Exercice 0.0.7** Soit  $S_1$  et  $S_2$  les deux surfaces définies par

$$S_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

1. Vérifier que le volume de  $\Omega$  limité par les deux surfaces est  $V = \frac{31}{24}\pi$ . ( 2 points)
2. Calculer  $\iiint_{\Omega} (z^2 + 1) dx dy dz$ . (On pourra fixer  $z$  dans deux intervalles que l'on fixera) ( 3 points)